Lista nr 8 (poziom rozszerzony)

Zad. 1 (2 pkt. za każdy przykład) Oblicz granicę ciągów:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(3n+2)^2-(1-2n)^2}{(2n-1)^2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+5}-n}{\sqrt{n^2+2}-n}$.

Zad. 2 (3 pkt.) Zbadaj monotoniczność ciągu:

$a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n+1}$.

Zad. 3 (3 pkt.) Naszkicuj wykres funkcji:

$f(x) = x^2 - 3|x| + 2$.

Zad. 4 (4 pkt.) Dana jest funkcja *f* dla wszystkich rzeczywistych argumentów *x*

$f(x) = |x-1| - |x+2|$.

Naszkicuj wykres funkcji i podaj jej miejsca zerowe. Wyznacz wartości parametru *m*, dla których równanie *f*(x) = *m* nie ma rozwiązania.

Zad. 5 (3 pkt.) Wyznacz wartości parametru a takich, że prosta $x - 8y - 5 = 0$ jest styczna do wykresu funkcji

$y = \frac{1}{x^4} + a$.

Zad. 6 (4 pkt.) Dla *x* należących do przedziału [0, 2π] rozwiąż nierówność $\frac{\sin x+\cos x}{\cos 2x} > 0$.

Zad. 7 (3 pkt.) Wykaż, że gdy $a > 0$ to dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność:

$a^x + a^{-x} \geqslant 2$.

Zad. 8 (3 pkt.) Udowodnij, że dla wszystkich x, $y > 0$ spełniona jest nierówność:

$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} \geqslant x^2 + y^2$.

Zad. 9 (4 pkt. za nierówność) Znajdź rozwiązanie każdej z poniższych nierówności:

$\log_2^2 8x - \log_2^2 4x + \log_2^2 2x \geqslant \log_2 64$,

$4 \cdot 9^x < 4 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^x$,

$\sqrt{4x - x^2} \geqslant x - 2$.

Zad. 10 (3 pkt.) W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym, długość krawędzi podstawy jest równa *a* oraz kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy jest równy 45°. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej jej krawędzi bocznej. Oblicz pole tego przekroju.

Zad. 11 (4 pkt.) W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości x i y wpisano okrąg o promieniu 1. Wyznacz y jako funkcję x. Sporządź wykres tej funkcji.

Zad. 12 (4 pkt.) W trójkąt *ABC* wpisano okrąg przez, którego środek poprowadzono prostą równoległą do boku *AB*. Przecina ona boki *CA* i *CB* odpowiednio w punktach *E* i *D*. Wykaż, że |*ED*|=|*EA*|+|*DB*|.